Algorytm Bongartza – obliczenia symboliczne w problemach macierzowych

Andrzej Mróz

**Zakład Kombinatoryki i Obliczeń Symbolicznych,
UMK, Toruń**

FiT 2013

e-mail: amroz@mat.umk.pl

Oznaczenia

- k – ciało,
- $\mathbb{M}_{n\times m}(k)$ – $n \times m$ macierze nad k,
- $$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(k) := \mathbb{M}_{n\times n}(k)$$

  – *Klatka Jordana* (o wartości własnej $\lambda \in k$).

Oznaczenia

- k – ciało,
- $\mathbb{M}_{n\times m}(k)$ – $n \times m$ macierze nad k,
- $J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(k) := \mathbb{M}_{n\times n}(k)$

  – *Klatka Jordana* (o wartości własnej $\lambda \in k$).

Dla $A \in \mathbb{M}_{n\times m}(k)$, $B \in \mathbb{M}_{n'\times m'}(k)$,
rozważamy ich *sumę prostą*

$$A \oplus B := \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{(n+n')\times(m+m')}(k).$$

Klasyczny problem Jordana

$A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ są *podobne*, o ile istnieje odwracalna macierz $C \in \mathbb{M}_n(k)$ taka, że

$$A = CBC^{-1}$$

(piszemy $A \sim B$).

Klasyczny problem Jordana

$A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ są *podobne*, o ile istnieje odwracalna macierz $C \in \mathbb{M}_n(k)$ taka, że

$$A = CBC^{-1}$$

(piszemy $A \sim B$).

Problem Jordana

Opisać wszystkie klasy podobieństwa w $\mathbb{M}_n(k)$.

Klasyczny problem Jordana

$A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ są *podobne*, o ile istnieje odwracalna macierz $C \in \mathbb{M}_n(k)$ taka, że

$$A = CBC^{-1}$$

(piszemy $A \sim B$).

Problem Jordana

Opisać wszystkie klasy podobieństwa w $\mathbb{M}_n(k)$.

Zwykle problem tego typu ogranicza się do macierzy nierozkładalnych (macierz jest *nierozkładalna*, gdy nie jest podobna do nietrywialnej sumy prostej).

Klasyczny problem Jordana

$A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ są *podobne*, o ile istnieje odwracalna macierz $C \in \mathbb{M}_n(k)$ taka, że

$$A = CBC^{-1}$$

(piszemy $A \sim B$).

Problem Jordana

Opisać wszystkie klasy podobieństwa w $\mathbb{M}_n(k)$.

Zwykle problem tego typu ogranicza się do macierzy nierozkładalnych (macierz jest *nierozkładalna*, gdy nie jest podobna do nietrywialnej sumy prostej).

$k = \mathbb{C} \;\; \Rightarrow$ klasa podobieństwa dowolnej $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ zawiera dokładnie jedną (z dokładnością do permutacji klatek) macierz

$$J(A) = J_1 \oplus \ldots \oplus J_s$$

w *kanonicznej postaci Jordana*, gdzie $J_1, \ldots, J_s$ są odpowiednimi klatkami Jordana.

Klasyczny problem Jordana

$A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ są *podobne*, o ile istnieje odwracalna macierz $C \in \mathbb{M}_n(k)$ taka, że

$$A = CBC^{-1}$$

(piszemy $A \sim B$).

Problem Jordana

Opisać wszystkie klasy podobieństwa w $\mathbb{M}_n(k)$.

Zwykle problem tego typu ogranicza się do macierzy nierozkładalnych (macierz jest *nierozkładalna*, gdy nie jest podobna do nietrywialnej sumy prostej).

$k = \mathbb{C} \;\; \Rightarrow$ klasa podobieństwa dowolnej $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ zawiera dokładnie jedną (z dokładnością do permutacji klatek) macierz

$$J(A) = J_1 \oplus \ldots \oplus J_s$$

w *kanonicznej postaci Jordana*, gdzie $J_1, \ldots, J_s$ są odpowiednimi klatkami Jordana.

A jest nierozkładalna $\Leftrightarrow A \sim J_n(\lambda)$, dla pewnej $\lambda \in \mathbb{C}$.

Język modułów

- k-algebra $=$ pierścień z 1 wyposażony w strukturę przestrzeni liniowej (nad k),

Język modułów

- k-algebra = pierścień z 1 wyposażony w strukturę przestrzeni liniowej (nad k),
- $k[t]$ – k-algebra wszystkich wielomianów jednej zmiennej t nad k.

Język modułów

- k-algebra = pierścień z 1 wyposażony w strukturę przestrzeni liniowej (nad k),
- $k[t]$ – k-algebra wszystkich wielomianów jednej zmiennej t nad k.

Definicja

M jest *modułem* nad k-algebrą Λ, gdy M jest k-przestrzenią liniową z działaniem $* : \Lambda \times M \to M$.

$\operatorname{mod} \Lambda$ = kategoria skończenie wymiarowych Λ-modułów.

Język modułów

- k-algebra = pierścień z 1 wyposażony w strukturę przestrzeni liniowej (nad k),
- $k[t]$ – k-algebra wszystkich wielomianów jednej zmiennej t nad k.

Definicja

M jest *modułem* nad k-algebrą Λ, gdy M jest k-przestrzenią liniową z działaniem $* : \Lambda \times M \to M$.

$\mathrm{mod}\,\Lambda$ = kategoria skończenie wymiarowych Λ-modułów.

Każda macierz $A \in \mathbb{M}_n(k)$ wyznacza $k[t]$-moduł

$$M(A) := k^n$$

z działaniem $f \in k[t]$ na $v \in k^n$ zadanym

$$f * v := f(A) \cdot v$$

(k^n = wektory kolumnowe).

$k[t]$-moduły

Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$:

- $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad M(A) \cong M(B)$.

$k[t]$-moduły

Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$:

- $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad M(A) \cong M(B).$
- $M(A \oplus B) = M(A) \oplus M(B).$

$k[t]$-moduły

Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$:

- $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad M(A) \cong M(B)$.
- $M(A \oplus B) = M(A) \oplus M(B)$.
- $A \in \mathbb{M}_n(k)$ jest macierzą nierozkładalną $\Leftrightarrow$ $M(A)$ jest modułem nierozkładalnym.

$k[t]$-moduły

Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$:

- $A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad M(A) \cong M(B)$.
- $M(A \oplus B) = M(A) \oplus M(B)$.
- $A \in \mathbb{M}_n(k)$ jest macierzą nierozkładalną $\Leftrightarrow$ $M(A)$ jest modułem nierozkładalnym.

Obserwacja

Możemy rozważać o wiele ogólniejsze problemy macierzowe i atakować je używając technik współczesnej teorii modułów (reprezentacji).

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \mathrm{mod}\, k[t]$). Problemy obliczeniowe:

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ $(\cong \mathrm{mod}\, k[t])$. Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ $(\cong \operatorname{mod} k[t])$. Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \mathrm{mod}\, k[t]$). Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

(PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \operatorname{mod} k[t]$). Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

(PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadaj, czy $A \cong B$.

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \operatorname{mod} k[t]$). Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

(PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadaj, czy $A \cong B$.

(PI') Zbadaj, czy $A \cong B$ oraz znajdź konkretny izomorfizm $C : A \to B$.

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \mathrm{mod}\, k[t]$). Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

(PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadaj, czy $A \cong B$.

(PI') Zbadaj, czy $A \cong B$ oraz znajdź konkretny izomorfizm $C : A \to B$.

(PK) $\Rightarrow$ (PR),(PM),(PI), ale (PK) jest "trudny".

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \mathrm{mod}\, k[t]$). Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

(PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadaj, czy $A \cong B$.

(PI') Zbadaj, czy $A \cong B$ oraz znajdź konkretny izomorfizm $C : A \to B$.

(PK) $\Rightarrow$ (PR),(PM),(PI), ale (PK) jest "trudny".
(PM) $\Rightarrow$ (PI).

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \operatorname{mod} k[t]$). Problemy obliczeniowe:

- (PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.
- (PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.
- (PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.
- (PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadaj, czy $A \cong B$.
- (PI') Zbadaj, czy $A \cong B$ oraz znajdź konkretny izomorfizm $C : A \to B$.

(PK) $\Rightarrow$ (PR),(PM),(PI), ale (PK) jest "trudny".
(PM) $\Rightarrow$ (PI). (PI) (i (PI')) ma wiele rozwiązań (postacie Frobeniusa; postacie Smitha...).

Problemy

Ustalmy $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \mathrm{mod}\, k[t]$). Problemy obliczeniowe:

(PK) *Problem postaci kanonicznej*. Wyznacz postać kanoniczną $J(A)$.

(PR) *Problem rozkładu* . Wyznacz rozkład $A \cong X_1 \oplus \ldots \oplus X_s$, dla nierozkładalnych $X_1, \ldots, X_s$.

(PM) *Problem maksymalnego wspólnego składnika*. Wyznacz X, A', B' takie, że $A \cong X \oplus A'$, $B \cong X \oplus B'$ oraz X jest maks.

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadaj, czy $A \cong B$.

(PI') Zbadaj, czy $A \cong B$ oraz znajdź konkretny izomorfizm $C : A \to B$.

(PK) $\Rightarrow$ (PR),(PM),(PI), ale (PK) jest "trudny".
(PM) $\Rightarrow$ (PI). (PI) (i (PI')) ma wiele rozwiązań (postacie Frobeniusa; postacie Smitha...).

Problemy mogą być rozważane dla dowolnej k-algebry (nie tylko $k[t]$).

(PM) Maksymalny wspólny składnik

k – dowolne ciało,

Λ – ustalona skończenie generowana k-algebra, ze zbiorem generatorów $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

k – dowolne ciało,

Λ – ustalona skończenie generowana k-algebra, ze zbiorem generatorów $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$.

Dla $n, s \geq 1$, każdy układ $(M_{\lambda_1}, \dots, M_{\lambda_s}) \in \mathbb{M}_n(k)^s$ (spełniający odp. relacje) wyznacza Λ-moduł

$$M := k^n$$

z działaniami λ_i na M zadanymi przez M_{λ_i}, dla $i = 1, \dots, s$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

k – dowolne ciało,

Λ – ustalona skończenie generowana k-algebra, ze zbiorem generatorów $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$.

Dla $n, s \geq 1$, każdy układ $(M_{\lambda_1}, \ldots, M_{\lambda_s}) \in \mathbb{M}_n(k)^s$ (spełniający odp. relacje) wyznacza Λ-moduł

$$M := k^n$$

z działaniami λ_i na M zadanymi przez M_{λ_i}, dla $i = 1, \ldots, s$.

- M jest w pełni zakodowany jako skończony zbiór danych, wygodny do obliczeń.
- Każdy moduł z $\mathrm{mod}\,\Lambda$ jest izomorficzny z pewnym modułem zadanym macierzami jak wyżej.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Ustalmy $M, N \in \operatorname{mod} \Lambda$, $m = \dim_k M$ oraz $n = \dim_k N$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Ustalmy $M, N \in \operatorname{mod} \Lambda$, $m = \dim_k M$ oraz $n = \dim_k N$.
B_1 (odp. B_2, B_3) = k-baza ${}_{\Lambda}(M, N)$ (odp. ${}_{\Lambda}(N, M)$, ${}_{\Lambda}(M, M)$).

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Ustalmy $M, N \in \operatorname{mod} \Lambda$, $m = \dim_k M$ oraz $n = \dim_k N$.
B_1 (odp. B_2, B_3) $=$ k-baza ${}_{\Lambda}(M, N)$ (odp. ${}_{\Lambda}(N, M)$, ${}_{\Lambda}(M, M)$).

Stwierdzenie (Bongartz, 1989).

- *Dla każdego* $f \in {}_{\Lambda}(M, N)$, $g \in {}_{\Lambda}(N, M)$ *mamy* $M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l$ *oraz* $N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l$, *gdzie* $l = \max(m, n)$. *Ponadto,* $\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Ustalmy $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, $m = \dim_k M$ oraz $n = \dim_k N$.
B_1 (odp. B_2, B_3) $=$ k-baza ${}_{\Lambda}(M,N)$ (odp. ${}_{\Lambda}(N,M)$, ${}_{\Lambda}(M,M)$).

Stwierdzenie (Bongartz, 1989).

• *Dla każdego* $f \in {}_{\Lambda}(M,N)$, $g \in {}_{\Lambda}(N,M)$ *mamy*
$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l$ *oraz* $N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l$,
gdzie $l = \max(m,n)$. *Ponadto,* $\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l$.

• *M i N nie mają niezerowego wspólnego składnika* $\Leftrightarrow$
$\forall\ (\alpha,\beta,\gamma) \in B_1 \times B_2 \times B_3$, $\gamma\beta\alpha$ *jest nilpotentny.*

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Ustalmy $M, N \in \operatorname{mod} \Lambda$, $m = \dim_k M$ oraz $n = \dim_k N$.
B_1 (odp. B_2, B_3) = k-baza ${}_\Lambda(M,N)$ (odp. ${}_\Lambda(N,M)$, ${}_\Lambda(M,M)$).

Stwierdzenie (Bongartz, 1989).

• *Dla każdego* $f \in {}_\Lambda(M,N)$, $g \in {}_\Lambda(N,M)$ *mamy*
$M = \operatorname{Im}(gf)^l \oplus \operatorname{Ker}(gf)^l$ *oraz* $N = \operatorname{Im}(fg)^l \oplus \operatorname{Ker}(fg)^l$,
gdzie $l = \max(m,n)$. *Ponadto,* $\operatorname{Im}(gf)^l \cong \operatorname{Im}(fg)^l$.
• *M i N nie mają niezerowego wspólnego składnika* $\Leftrightarrow$
$\forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in B_1 \times B_2 \times B_3$, $\gamma\beta\alpha$ *jest nilpotentny.*

Stwierdzenie (M., 2012).

• *Dla każdego* $f \in {}_\Lambda(M,N)$, $g \in {}_\Lambda(N,M)$ *mamy*
$M = \operatorname{Im}(gf)^l \oplus \operatorname{Ker}(gf)^l$ *oraz* $N = \operatorname{Im}(fg)^l \oplus \operatorname{Ker}(fg)^l$,
gdzie $l = m$, *gdy* $m = n$, *lub* $l = \min(m,n) + 1$, *gdy* $m \neq n$.
Ponadto, $\operatorname{Im}(gf)^l \cong \operatorname{Im}(fg)^l$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Ustalmy $M, N \in \operatorname{mod} \Lambda$, $m = \dim_k M$ oraz $n = \dim_k N$.
B_1 (odp. B_2, B_3) $=$ k-baza ${}_{\Lambda}(M, N)$ (odp. ${}_{\Lambda}(N, M)$, ${}_{\Lambda}(M, M)$).

Stwierdzenie (Bongartz, 1989).

• *Dla każdego* $f \in {}_{\Lambda}(M, N)$, $g \in {}_{\Lambda}(N, M)$ *mamy*
$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l$ *oraz* $N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l$,
gdzie $l = \max(m, n)$. *Ponadto,* $\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l$.
• *M i N nie mają niezerowego wspólnego składnika* $\Leftrightarrow$
$\forall\ (\alpha, \beta, \gamma) \in B_1 \times B_2 \times B_3$, $\gamma\beta\alpha$ *jest nilpotentny.*

Stwierdzenie (M., 2012).

• *Dla każdego* $f \in {}_{\Lambda}(M, N)$, $g \in {}_{\Lambda}(N, M)$ *mamy*
$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l$ *oraz* $N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l$,
gdzie $l = m$, *gdy* $m = n$, *lub* $l = \min(m, n) + 1$, *gdy* $m \neq n$.
Ponadto, $\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l$.
• *M i N nie mają niezerowego wspólnego składnika* $\Leftrightarrow$
$\forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2$, $\beta\alpha$ *jest nilpotentny.*

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l$, $N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l$,
$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l$,
M i N nie mają w.s. $(\neq 0)$ $\Leftrightarrow \forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2$, $\beta\alpha$ nilp.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l$, $N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l$,
$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l$,
M i N nie mają w.s. $(\neq 0)$ $\Leftrightarrow \forall\,(\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2$, $\beta\alpha$ nilp.

$\mathtt{CDS}(M, N)$

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, $m = \dim_k M \leq n = \dim_k N$.

Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M'$, $N \cong X \oplus N'$;

$X \neq 0 \Leftrightarrow M$, N mają w.s. $(\neq 0)$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l,\ N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l,$
$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l,$
M i N nie mają w.s. $(\neq 0)$ $\Leftrightarrow \forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2,\ \ \beta\alpha$ nilp.

$\mathtt{CDS}(M, N)$

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ m = \dim_k M\ \leq\ n = \dim_k N.$

Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M',\ N \cong X \oplus N'$;

$X \neq 0\ \Leftrightarrow M,\ N$ mają w.s. $(\neq 0)$.

compute basis B_1 of space ${}_\Lambda(M, N)$;
compute basis B_2 of space ${}_\Lambda(N, M)$;
if $m = n$ then l := m else l := $m + 1$;
for all $f \in B_1$ do
  for all $g \in B_2$ do {
    δ := $(gf)^{l-1} g$;
    if γ := $\delta f \neq 0$ then
      return $(\mathtt{Im}(\gamma), \mathtt{Ker}(\gamma), \mathtt{Ker}(f\delta))$; }
return $(0, M, N)$;

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l,\ N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l,$
$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l,$
M i N nie mają w.s. $(\neq 0)$ $\Leftrightarrow \forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2,\ \ \beta\alpha$ nilp.

`CDS`(M, N)

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ m = \dim_k M\ \leq\ n = \dim_k N.$

Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M',\ N \cong X \oplus N'$;

$X \neq 0$ $\Leftrightarrow$ M, N mają w.s. $(\neq 0)$.

```
compute basis B_1 of space _Λ(M, N);          O((mn)^3)
compute basis B_2 of space _Λ(N, M);          O((mn)^3)
if m = n then l := m else l := m + 1;
for all f ∈ B_1 do
   for all g ∈ B_2 do {
      δ := (gf)^(l−1) g;
      if γ := δf ≠ 0 then
         return ( Im(γ), Ker(γ), Ker(fδ) ); }
return (0, M, N);
```

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l,\ N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l,$

$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l,$

M i N nie mają w.s. $(\neq 0) \ \Leftrightarrow \forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2,\ \ \beta\alpha$ nilp.

$\mathtt{CDS}(M, N)$

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ m = \dim_k M\ \leq\ n = \dim_k N.$

Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M',\ N \cong X \oplus N'$;

$X \neq 0 \ \Leftrightarrow M,\ N$ mają w.s. $(\neq 0)$.

compute basis B_1 of space ${}_\Lambda(M, N)$; $\mathcal{O}((mn)^3)$

compute basis B_2 of space ${}_\Lambda(N, M)$; $\mathcal{O}((mn)^3)$

if $m = n$ then l := m else l := $m+1$;

for all $f \in B_1$ do

  for all $g \in B_2$ do {

    δ := $(gf)^{l-1}g$; $\mathcal{O}(\quad (m^2n + m^3 \log m))$

    if γ := $\delta f \neq 0$ then

      return ($\mathtt{Im}(\gamma)$, $\mathtt{Ker}(\gamma)$, $\mathtt{Ker}(f\delta)$); }

return $(0, M, N)$;

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l,\ N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l,$

$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l,$

M i N nie mają w.s. $(\neq 0)$ $\Leftrightarrow \forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2,\ \ \beta\alpha$ nilp.

$\mathtt{CDS}(M, N)$

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ m = \dim_k M\ \leq\ n = \dim_k N.$

Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M',\ N \cong X \oplus N'$;

$X \neq 0\ \Leftrightarrow M,\ N$ mają w.s. $(\neq 0)$.

compute basis B_1 of space ${}_{\Lambda}(M, N)$; $\qquad \mathcal{O}((mn)^3)$
compute basis B_2 of space ${}_{\Lambda}(N, M)$; $\qquad \mathcal{O}((mn)^3)$
if $m = n$ then l := m else l := $m + 1$;
for all $f \in B_1$ do
  for all $g \in B_2$ do {
    δ := $(gf)^{l-1} g$; $\qquad \mathcal{O}((mn)^2 (m^2 n + m^3 \log m))$
    if γ := $\delta f \neq 0$ then
      return $(\mathrm{Im}(\gamma), \mathrm{Ker}(\gamma), \mathrm{Ker}(f\delta))$; }
return $(0, M, N)$;

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$M = \mathrm{Im}\,(gf)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(gf)^l,\ N = \mathrm{Im}\,(fg)^l \oplus \mathrm{Ker}\,(fg)^l,$
$\mathrm{Im}\,(gf)^l \cong \mathrm{Im}\,(fg)^l,$
M i N nie mają w.s. $(\neq 0)$ $\Leftrightarrow \forall\ (\alpha, \beta) \in B_1 \times B_2,\ \ \beta\alpha$ nilp.

CDS(M, N)

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda,\ m = \dim_k M \ \leq\ n = \dim_k N.$

Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M',\ N \cong X \oplus N'$;

$X \neq 0 \ \Leftrightarrow M,\ N$ mają w.s. $(\neq 0)$.

compute basis B_1 of space ${}_\Lambda(M, N)$; $\quad \mathcal{O}((mn)^3)$
compute basis B_2 of space ${}_\Lambda(N, M)$; $\quad \mathcal{O}((mn)^3)$
if $m = n$ then l := m else l := $m + 1$;
for all $f \in B_1$ do
  for all $g \in B_2$ do {
    δ := $(gf)^{l-1} g$; $\quad \mathcal{O}((mn)^2(m^2 n + m^3 \log m))$
    if γ := $\delta f \neq 0$ then
      return (Im(γ), Ker(γ), Ker$(f\delta)$); } $\quad$ pomijalne
return $(0, M, N)$;

Złożoność pesymistyczna: $\mathcal{O}(m^4 n^2 (n + m \log m))$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

$\mathtt{MCDS}(M, N)$

Wejście: $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, $m = \dim_k M \leq n = \dim_k N$.
Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \mathrm{mod}\,\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M'$, $N \cong X \oplus N'$ i X jest maksymalnym w.s. M i N.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

MCDS(M, N)

Wejście: $M, N \in \operatorname{mod}\Lambda$, $m = \dim_k M \leq n = \dim_k N$.
Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \operatorname{mod}\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M'$, $N \cong X \oplus N'$ i X jest maksymalnym w.s. M i N.

```
V := M;   W := N;   X := 0;   Y := 0;
repeat
   X := X ⊕ Y;
   (Y, V, W) := CDS(V, W);
until  Y = 0;
return (X, V, W);
```

(PM) Maksymalny wspólny składnik

MCDS(M, N)

Wejście: $M, N \in \operatorname{mod}\Lambda$, $m = \dim_k M \leq n = \dim_k N$.
Wyjście: (X, M', N'), dla $X, M', N' \in \operatorname{mod}\Lambda$, t.ż. $M \cong X \oplus M'$, $N \cong X \oplus N'$ i X jest maksymalnym w.s. M i N.

```
V := M;   W := N;   X := 0;   Y := 0;
repeat
   X := X ⊕ Y;
   (Y, V, W) := CDS(V, W);
until  Y = 0;
return  (X, V, W);
```

Implementacja jest częścią pakietu QPA (ver. $\geq$ 1.07) dla GAP: `http://quiverspathalg.sourceforge.net`.

(Procedury `CommonDirectSummand`, `MaximalCommonDirectSummand`).

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Przykład. $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Q}[t]$,
$M := J_2(3) \oplus J_1(4) \oplus J_1(7) \oplus J_1(0)^{11}$, $\dim_k M = 15$,
$N := J_{12}(0) \oplus J_1(3) \oplus J_1(7) \oplus J_2(3)$, $\dim_k N = 16$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Przykład. $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Q}[t]$,
$M := J_2(3) \oplus J_1(4) \oplus J_1(7) \oplus J_1(0)^{11}$, $\dim_k M = 15$,
$N := J_{12}(0) \oplus J_1(3) \oplus J_1(7) \oplus J_2(3)$, $\dim_k N = 16$.

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Przykład. $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Q}[t]$,

$M := J_2(3) \oplus J_1(4) \oplus J_1(7) \oplus J_1(0)^{11}$, $\dim_k M = 15$,

$N := J_{12}(0) \oplus J_1(3) \oplus J_1(7) \oplus J_2(3)$, $\dim_k N = 16$.

oryginalny $\mathtt{MCDS}(M, N)$: 43.480 s.

	V, W	HT	VW,WV,VV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.062	15, 15, 125	18.440	22 879	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14, 124	16.164	22 818	$J_2(3)$
3	12, 13	0.031	11, 11, 122	8.752	14 762	0

ulepszony $\mathtt{MCDS}(M, N)$: 0.405 s.

	V, W	HT	VW,WV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.031	15, 15	0.156	184	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14	0.125	185	$J_2(3)$
3	12, 13	0.015	11, 11	0.047	121	0

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Przykład. $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Q}[t]$,

$M := J_2(3) \oplus J_1(4) \oplus J_1(7) \oplus J_1(0)^{11}$, $\dim_k M = 15$,

$N := J_{12}(0) \oplus J_1(3) \oplus J_1(7) \oplus J_2(3)$, $\dim_k N = 16$.

oryginalny `MCDS`(M, N) : 43.480 s.

	V, W	HT	VW,WV,VV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.062	15, 15, 125	18.440	22 879	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14, 124	16.164	22 818	$J_2(3)$
3	12, 13	0.031	11, 11, 122	8.752	14 762	0

ulepszony `MCDS`(M, N) : 0.405 s.

	V, W	HT	VW,WV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.031	15, 15	0.156	184	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14	0.125	185	$J_2(3)$
3	12, 13	0.015	11, 11	0.047	121	0

Przykład II. $\mathbb{M}_{15}(\mathbb{Q}) \ni C :=$ losowa (gęsta) macierz odwracalna.

$$\mathtt{MCDS}(CJ_{15}(3)C^{-1}, J_1(3)^{15}) :$$

Przykład. $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Q}[t]$,

$M := J_2(3) \oplus J_1(4) \oplus J_1(7) \oplus J_1(0)^{11}$, $\dim_k M = 15$,

$N := J_{12}(0) \oplus J_1(3) \oplus J_1(7) \oplus J_2(3)$, $\dim_k N = 16$.

oryginalny $\mathtt{MCDS}(M, N)$: 43.480 s.

	V, W	HT	VW,WV,VV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.062	15, 15, 125	18.440	22 879	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14, 124	16.164	22 818	$J_2(3)$
3	12, 13	0.031	11, 11, 122	8.752	14 762	0

ulepszony $\mathtt{MCDS}(M, N)$: 0.405 s.

	V, W	HT	VW,WV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.031	15, 15	0.156	184	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14	0.125	185	$J_2(3)$
3	12, 13	0.015	11, 11	0.047	121	0

Przykład II. $\mathbb{M}_{15}(\mathbb{Q}) \ni C :=$ losowa (gęsta) macierz odwracalna.

oryginalny $\mathtt{MCDS}(CJ_{15}(3)C^{-1}, J_1(3)^{15})$: 2 h. : 57 m. : 13 s.

	V, W	HT	VW,WV,VV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 15	2:47:41.5	15, 15, 15	9:31.5	3 375	0

ulepszony $\mathtt{MCDS}(CJ_{15}(3)C^{-1}, J_1(3)^{15})$: 6.4 s.

	V, W	HT	VW,WV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 15	1.6	15, 15	4.8	225	0

(PM) Maksymalny wspólny składnik

Przykład. $k = \mathbb{Q}$, $\Lambda = \mathbb{Q}[t]$,
$M := J_2(3) \oplus J_1(4) \oplus J_1(7) \oplus J_1(0)^{11}$, $\dim_k M = 15$,
$N := J_{12}(0) \oplus J_1(3) \oplus J_1(7) \oplus J_2(3)$, $\dim_k N = 16$.

oryginalny $\texttt{MCDS}(M, N)$: 43.480 s.

	V, W	HT	VW,WV,VV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.062	15, 15, 125	18.440	22 879	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14, 124	16.164	22 818	$J_2(3)$
3	12, 13	0.031	11, 11, 122	8.752	14 762	0

ulepszony $\texttt{MCDS}(M, N)$: 0.405 s.

	V, W	HT	VW,WV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 16	0.031	15, 15	0.156	184	$J_1(7)$
2	14, 15	0.031	14, 14	0.125	185	$J_2(3)$
3	12, 13	0.015	11, 11	0.047	121	0

Przykład II. $\mathbb{M}_{15}(\mathbb{Q}) \ni C :=$ losowa (gęsta) macierz odwracalna.

oryginalny $\texttt{MCDS}(CJ_{15}(3)C^{-1}, J_1(3)^{15})$: 2 h. : 57 m. : 13 s.

	V, W	HT	VW,WV,VV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 15	2:47:41.5	15, 15, 15	9:31.5	3 375	0

ulepszony $\texttt{MCDS}(CJ_{15}(3)C^{-1}, J_1(3)^{15})$: 6.4 s.

	V, W	HT	VW,WV	LT	LE	c.d.s.
1	15, 15	1.6	15, 15	4.8	225	0

Więcej przykładów (również dla innych algebr i ciał): A. M., On the computational complexity of Bongartz's algorithm, *Fund. Inform.* 123 (2013) 317-329,

oraz `http://www.mat.umk.pl/~izydor/pr/mcdsen.html`.

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

- „Naiwne” (wprost z definicji), algorytmiczne rozwiązanie (PI) jest bardzo niewydajne (co najmniej wykładnicze!).

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

- „Naiwne” (wprost z definicji), algorytmiczne rozwiązanie (PI) jest bardzo niewydajne (co najmniej wykładnicze!).
- Ale oczywiście:

$$M \cong N \quad \Leftrightarrow \quad \dim_k M = \dim_k N = \dim_k \mathtt{MCDS}(M, N)$$

$\Rightarrow$ rozwiązanie wielomianowe!

(Procedura QPA `IsomorphicModules`).

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

- „Naiwne” (wprost z definicji), algorytmiczne rozwiązanie (PI) jest bardzo niewydajne (co najmniej wykładnicze!).
- Ale oczywiście:

  $$M \cong N \quad \Leftrightarrow \quad \dim_k M = \dim_k N = \dim_k \mathtt{MCDS}(M, N)$$

  $\Rightarrow$ rozwiązanie wielomianowe!

  (Procedura QPA `IsomorphicModules`).
- Istnieją pewne wyspecjalizowane rozwiązania (PI) dla modułów nad pewnymi algebrami (bardziej efektywne niż poprzez m.w.s.).
  - A. M., On the multiplicity problem and the isomorphism problem for the four subspace algebra, *Comm. Algebra*, 40:6 (2012), 2005-2036.
  - P. Dowbor i A. M., On a separation of orbits in the module variety for string special biserial algebras, *J. Pure Applied Algebra* 213 (2009), 1804-1815.

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

(PI') Zbadać, czy $M \cong N$ i jeśli tak jest, znaleźć konkretny izomorfizm $\phi : M \to N$.

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

(PI') Zbadać, czy $M \cong N$ i jeśli tak jest, znaleźć konkretny izomorfizm $\phi : M \to N$.

Uwaga. Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ ($\cong \mathrm{mod}\ k[t]$), stwierdzanie, czy $A \sim B$ jest dużo łatwiejsze obliczeniowo niż znajdowanie konkretnej C t.ż. $A = CBC^{-1}$ ("postać Jordana" versus "baza Jordana").

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

(PI') Zbadać, czy $M \cong N$ i jeśli tak jest, znaleźć konkretny izomorfizm $\phi : M \to N$.

Uwaga. Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)$ $(\cong \operatorname{mod} k[t])$, stwierdzanie, czy $A \sim B$ jest dużo łatwiejsze obliczeniowo niż znajdowanie konkretnej C t.ż. $A = CBC^{-1}$ ("postać Jordana" versus "baza Jordana").

Lemat.

Dla $M, N \in \operatorname{mod} \Lambda$ t.ż. $M \cong N$, konstrukcja izomorfizmu $\phi : M \to N$ może być skutkiem ubocznym omówionego algorytmu na wyznaczanie m.w.s. zastosowanego do M i N.

(PI) Problem izomorfizmu

(PI) *Problem izomorfizmu*. Zbadać, czy $M \cong N$.

(PI') Zbadać, czy $M \cong N$ i jeśli tak jest, znaleźć konkretny izomorfizm $\phi : M \to N$.

Uwaga. Dla $A, B \in \mathbb{M}_n(k)\,(\cong \mathrm{mod}\ k[t])$, stwierdzanie, czy $A \sim B$ jest dużo łatwiejsze obliczeniowo niż znajdowanie konkretnej C t.ż. $A = CBC^{-1}$ ("postać Jordana" versus "baza Jordana").

Lemat.

Dla $M, N \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ t.ż. $M \cong N$, konstrukcja izomorfizmu $\phi : M \to N$ może być skutkiem ubocznym omówionego algorytmu na wyznaczanie m.w.s. zastosowanego do M i N.

$$\begin{array}{ccccccccc}
M = & X & \oplus & X_1 & \oplus & \dots & \oplus & X_m \\
& \cong\big\downarrow f_{|X} & & \cong\big\downarrow f_{1\,|X_1} & & & & \cong\big\downarrow f_{m\,|X_m} \\
N = & Y & \oplus & Y_1 & \oplus & \dots & \oplus & Y_m
\end{array}$$

$$\phi := f_{|X} \oplus f_{1\,|X_1} \oplus \dots \oplus f_{m|X_m} : M \to N$$

Problemy macierzowe

$\mod k[t]$

Ogólny obrazek

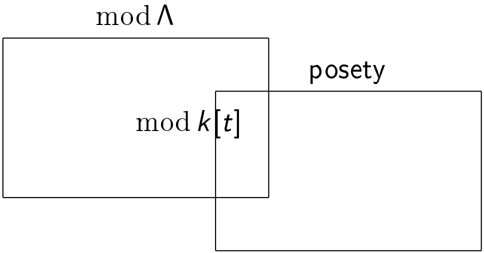
Problemy macierzowe

$\operatorname{mod} \Lambda$

$\operatorname{mod} k[t]$

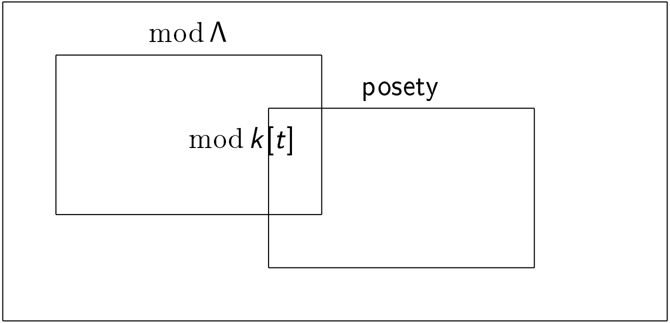
Ogólny obrazek

Problemy macierzowe



Problemy macierzowe

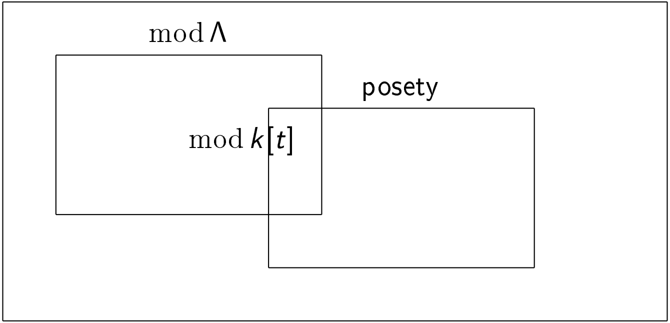
Dane dla algorytmu *Belitskii'ego* redukcji macierzy



Ogólny obrazek

Problemy macierzowe

Dane dla algorytmu *Belitskii'ego* redukcji macierzy



Wyniki

$\operatorname{mod} \Lambda$

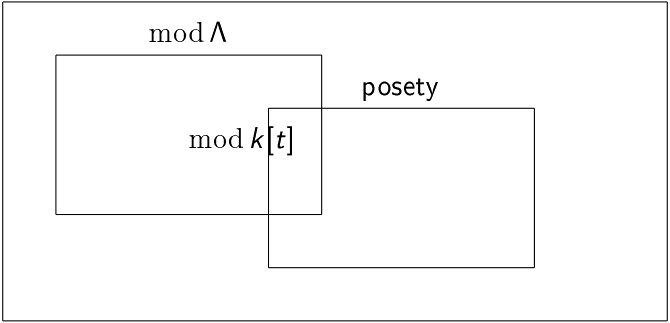
ten referat

- optymalizacja (PM)
- (PM) $\Rightarrow$ (PI)
- (PI')

Ogólny obrazek

Problemy macierzowe

Dane dla algorytmu *Belitskii'ego* redukcji macierzy



Wyniki

$\mathrm{mod}\,\Lambda$
ten referat

- optymalizacja (PM)
- (PM) $\Rightarrow$ (PI)
- (PI')

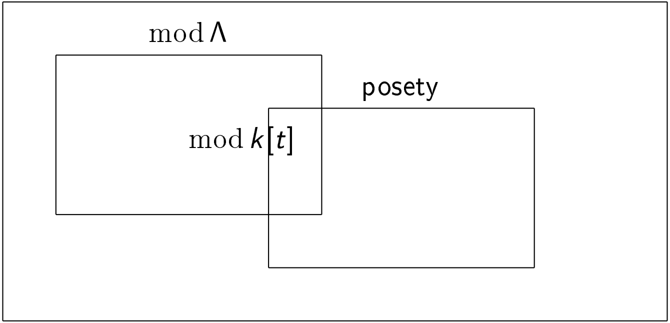
$\mathrm{mod}\,\Lambda$
(z P. Dowborem,
H. Meltzerem...)

- (PK)
- (PR)

Ogólny obrazek

Problemy macierzowe

Dane dla algorytmu *Belitskii'ego* redukcji macierzy



Wyniki

$\operatorname{mod} \Lambda$
ten referat

- optymalizacja (PM)
- (PM) $\Rightarrow$ (PI)
- (PI')

$\operatorname{mod} \Lambda$
(z P. Dowborem, H. Meltzerem...)

- (PK)
- (PR)

Algorytm Belitskii'ego
(z S. Kasjanem)

- (PK): grafy współczynników
- konsekwencje dla posetów
- (PR): (hipoteza) o rozkładzie