Spektra struktur o ograniczonym stopniu i planarnych

Eryk Kopczyński, Anuj Dawar

University of Warsaw, University of Cambridge

Mar 27, 2012

Spektra (Scholz '52)

Niech ϕ będzie formułą FO nad sygnaturą Σ.
$\mathrm{spec}(\phi)$ jest zbiorem takich $n \in \mathbb{N}$, że ϕ ma model rozmiaru n.

Przykład

$$\phi = \text{ koniunkcja aksjomatów przestrzeni liniowych nad } \mathbb{Z}_2$$
$$\mathrm{spec}(\phi) = \text{potęgi } 2$$

Przykład

$$\phi = \text{koniunkcja aksjomatów ciała}$$
$$\mathrm{spec}(\phi) = \text{potęgi liczb pierwszych}$$

... i teoria złożoności

Twierdzenie (Fagin '74, Jones & Selman '74)

Zbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ jest spektrum pewnej formuły ϕ

wtw

zbiór unarnych reprezentacji elementów S jest w **NP**

równoważnie:

zbiór binarnych reprezentacji elementów S jest w **NE**

(czas pseudowielomianowy)

Struktura modeli

Modele otrzymane z twierdzenia Fagina mają bardzo skomplikowaną strukturę.

Definicja

Grafem Gaifmana struktury $\mathfrak{A}$ nazywamy graf, którego wierzchołki to elementy uniwersum $\mathfrak{A}$, a krawędź (a_1, a_2) istnieje wtw a_1 i a_2 występują razem w pewnej krotce w pewnej relacji $(R^{\mathfrak{A}}(\ldots, a_1, \ldots, a_2, \ldots))$.

Graf Gaifmana struktury otrzymanej z dowodu Fagina będzie kliką.

Nasz cel

Co można powiedzieć, jeśli rozważamy jedynie modele z pewnej ograniczonej klasy?

Takie ograniczenia można wyrazić w terminach teorii grafów, jako własności grafu Gaifmana (ograniczona szerokość drzewiasta, ograniczony stopień, planarność, itd.)

Czy przy takich ograniczeniach również istnieje podobna charakteryzacja teoriozłożonościowa?

Wcześniejsze wyniki

- Dla sygnatur zwierających jedynie symbole unarne i jedną funkcję unarną, spektra mogą być jedynie zbiorami semiliniowymi (okresowymi od pewnego miejsca) (Durand, Fagin, Loescher '97)
- To samo zachodzi dla formuł MSO (Gurevich, Shelah '03)
- Dwie funkcje unarne wystarczą, by spektra były **NEXPTIME**-zupełne
- Jeśli wszystkie modele formuły CMSO ϕ mają ograniczoną szerokość drzewiastą, to $\mathrm{spec}(\phi)$ jest zbiorem semiliniowym (Fischer, Makowsky 2004)
- *Fifty years of the spectrum problem: survey and new results.* Durand, Jones, Makowsky, More, 2009

Grafy o ograniczonym stopniu

Spektrum stopnia d nazywamy zbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ taki, że $S = \mathrm{spec}(\phi)$ dla pewnej formuły ϕ takiej, że wszystkie modele ϕ są stopnia co najwyżej d.

Równoważnie: zbiór $S \subseteq \mathbb{N}$ taki, że dla pewnej formuły ϕ, $n \in S$ wtw ϕ ma model stopnia co najwyżej d.

Przez $\mathbf{BDSpec}_d$ oznaczamy zbiór wszystkich spektrów stopnia d.

Nasz wynik

Dla $d \geq 3$,

$$\mathbf{NTIME}_2(N) \subseteq \mathbf{BDSpec}_d \subseteq \mathbf{NTIME}_2(N \log^2 N)$$

gdzie $\mathbf{NTIME}_2(f(N))$ jest zbiorem takich zbiorów $S \subseteq \mathbb{N}$, że przynależność $N \in S$ może być rozpoznana przez niedeterministyczną wielotaśmową maszynę Turinga akceptującą zapis binarny N w czasie $O(f(N))$

- uwaga: N jest liczbą, nie długością reprezentacji ($\mathbf{NTIME}_2(N)$ to "czas pseudoliniowy")
- do pierwszej inkluzji wymagamy jedynie $d = 3$, relacji unarnych, i jednej symetrycznej relacji binarnej.

Technika: $\mathbf{NTIME}_2(N) \subseteq \mathbf{BDSpec}_d$

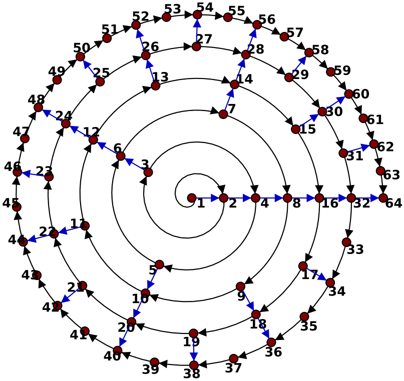
Jak symulować maszyny Turinga spektrami ograniczonego stopnia?
Używamy częściowych funkcji różnowartościowych (CFR)

$$k \text{ CFR} \rightarrow \text{stopień } 2k$$

Liczby naturalne

Aksjomatyzujemy następującą strukturę:

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, \ldots, N\} \\
f_A(x) &= x + 1 \\
g_A(x) &= 2x
\end{aligned}
$$



Funkcje na liczbach naturalnych

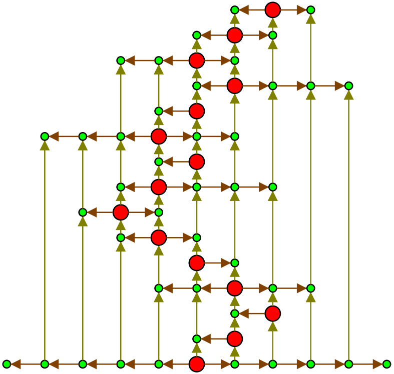
Możemy dodać następujące funkcje (gdzie C to stała w naszej strukturze):

$$\begin{aligned} h(x) &= x + C && (1) \\ j(x) &= x \times C && (2) \\ k(x) &= 2^x && (3) \\ l(x) &= \lfloor N/2^x \rfloor && (4) \end{aligned}$$

... i użyć l by znaleźć reprezentację binarną N, i h, by stworzyć maszynę Turinga działającą w pamięci C i czasie N/C

Efektywna symulacja maszyny Turinga

Przy użyciu bardziej skomplikowanych technik możemy to zoptymalizować do czasu $O(N)$:



Technika: $\mathbf{BDSpec}_d \subseteq \mathbf{NTIME}_2(N \log^2 N)$

By sprawdzić, czy $N \in \mathrm{spec}(\phi)$:

- Zgadujemy strukturę $\mathfrak{A}$ rozmiaru N i stopnia d
- Używamy twierdzenia Hanfa o lokalności by efektywnie sprawdzić, czy $\mathfrak{A}$ spełnia ϕ

Twierdzenie (Hanf '65)

Niech ϕ będzie formułą FO. Wówczas istnieją liczby r i M takie, że dla każdego grafu $G = (V, E)$, to czy $G \models \phi$ zależy jedynie od liczby r-sąsiedztw każdego typu, z dokładnością do progu M.

Dwie definicje spektrów planarnych

Można sobie wyobrazić dwie nierównoważne definicje spektrów planarnych:

- Spektrum *planarnym* formuły ϕ, $\mathrm{pspec}(\phi)$, nazywamy zbiór mocy wszystkich modeli ϕ których graf Gaifmana jest planarny

- **PSpec** jest zbiorem wszystkich $S \subseteq \mathbb{N}$ takich że $S = \mathrm{pspec}(\phi)$ dla pewnej formuły ϕ

- **FPSpec** jest zbiorem wszystkich $S \subseteq \mathbb{N}$ takich, że $S = \mathrm{spec}(\phi)$ dla pewnej formuły ϕ takiej, że wszystkie modele ϕ są planarne

Słabe spektra planarne: ograniczenia dolne

Twierdzenie

$\mathbf{NTIME}^S_2(N/\log N) \subseteq \mathbf{PSpec}$

- nasz model symulujący maszynę Turinga jest grafem planarnym, o ile maszyna ma jedną taśmę (indeks górny S)
- wszystkie elementy uniwersum będą częścią tej symulacji – o ile model jest plarany!
- nie jesteśmy w stanie odczytać rozmiaru uniwersum (to wymagało nieplanarności), ale możemy go obliczyć używając logarytmicznego narzutu

Słabe spektra planarne: maszyny z kolejką

Niech M będzie niedeterministyczną nieskracającą maszyną z kolejką

M akceptuje $n \in \mathbb{N}$ wtw M ma obliczenie zapisujące n symboli do kolejki

QTL $\subseteq P(\mathbb{N})$ jest klasą zbiorów liczb naturalnych akceptujących pewną maszynę z kolejką tego typu

Przykład

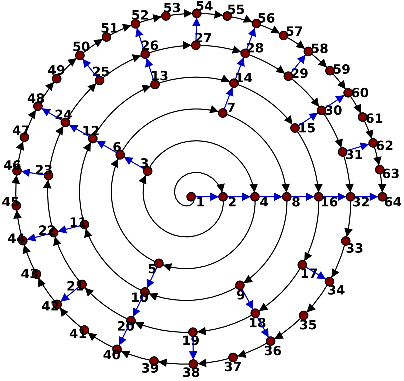
Początkowa zawartość kolejki: A

Przejścia:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow Aa \\ a &\rightarrow aa \\ A &\rightarrow \mathrm{accept} \end{aligned}$$

akceptuje liczby postaci $2^n - 1$

Wypisujemy wszystkie elementy kolejki w ciągu
Czarne strzałki: następny element kolejki Niebieskie strzałki: łączą głowicę odczytującą i zapisującą



Słabe spektra planarne: maszyny z kolejką

Twierdzenie

$$\mathbf{NTIME}_2(\sqrt{n}) \subseteq \mathbf{NTS}_2(n) \subseteq \mathbf{QTL} \subseteq \mathbf{PSpec}$$

$\mathbf{NTS}_2(n)$ = iloczyn czasu i pamięci jest $O(n)$

Słabe spektra planarne: ograniczenia górne

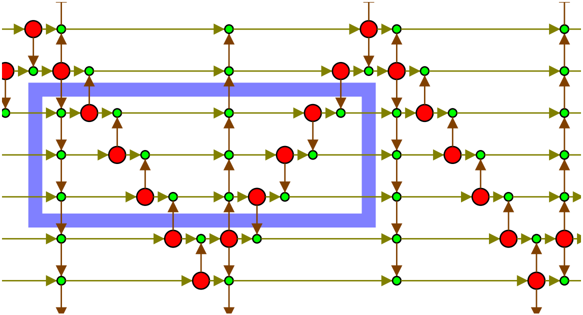
Nasze modele planarne do tej pory miały też ograniczony stopień ($\mathbf{PBDSpec}_d$).

$$\mathbf{PBDSpec}_d \subseteq \mathbf{NTIME}_2(N \log^2 N)$$

Bez założenia o ograniczonym stopniu, na niedeterministycznej maszynie RAM, w czasie liniowym możemy zgadnąć M, sprawdzić czy M jest grafem planarnym, i czy M spełnia ϕ (Frick, Grohe 2001). W połączeniu z twierdzeniem o hierarchii czasowej, to rozwiązuje problem otwarty z *Fifty years of the spectrum problem*.

Wymuszanie planarności

Nie możemy użyć naszej symulacji maszyn Turinga, jeżeli wymagamy, by wszystkie modele ϕ były planarne:



Wymuszanie planarności

Również nasza symulacja maszyny z kolejką nie działa:

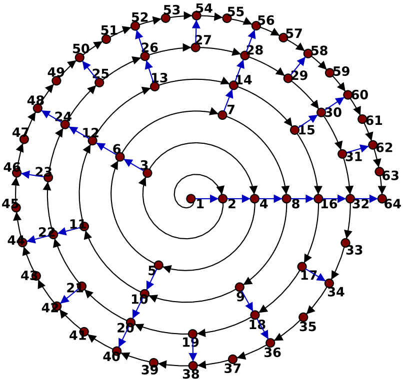
$$w \to^* w$$

Możemy zapisać takie obliczenie na torusie

Moglibyśmy jedynie symulować rozszerzającą maszynę z kolejką:

$$w \to^* u \text{ implies } |u| > |w|$$

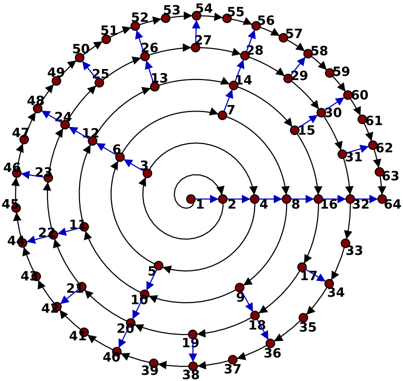
Wymuszanie planarności



Tego typu maszyny z kolejką zazwyczaj wykładniczo powiększają kolejkę w każdej iteracji, przez co uzyskujemy jedynie logarytmiczną liczbę iteracji.

Wymuszanie planarności

Używając $\log_d(N)$ zewnętrznych warstw tej spirali możemy obliczyć d-ową reprezentację N, i symulować maszynę Turinga działającą w pamięci $\log_d(N)$ i czasie $N^{1-\log_d 2}$



Wymuszanie planarności

Twierdzenie

$$\mathbf{NTISP}_2(N^{1-\epsilon}, \log N) \subseteq \mathbf{FPSpec}$$

Możemy symulować maszynę Turinga, która rozpoznaje dwójkową reprezentację N w pamięci $\log N$ i czasie $N^{1-\epsilon}$.

Przykład

zbiór liczb pierwszych (algorytm trywialny)

Problemy otwarte

- Czy można zmniejszyć przestrzeń między dolnymi a górnymi ograniczeniami?
- Czy można jakoś zwiększyć ilość pamięci dostępnej w przypadku wymuszonej planarności?
- Co z innymi klasami grafów (np. wykluczającymi minor)?

Podsumowanie

- Spektra
- Spektra o ograniczonym stopniu
- Słabe spektra planarne
- Silne spektra planarne

dziękuję