Bijekcja pomiędzy ważonymi ścieżkami Motzkina oraz ścieżkami Delannoya

Maciej Dziemiańczuk

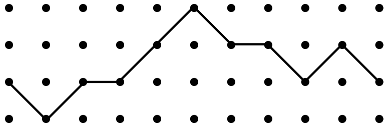
mdziemia@inf.ug.edu.pl

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański

Ścieżki kratowe

Definicja

Ścieżka kratowa to ciąg punktów z $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Parę kolejnych punktów ścieżki nazywamy **segmentami** ścieżki.

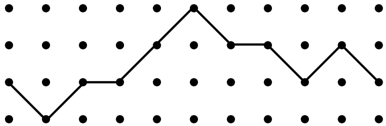


Rysunek: Ścieżka kratowa z $(0, 0)$ do $(10, 0)$.

Ścieżki kratowe

Reprezentacja

Segmenty będziemy reprezentowali jako wolne wektory w $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a ścieżkę jako ciąg segmentów. Dla uproszczenia, przy ustalonym zbiorze segmentów S, ścieżka będzie **napisem** nad S.



Rysunek: Ścieżka kratowa z $(0,0)$ do $(10,0)$.

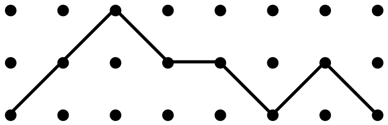
Przykład

Niech $H = (1,0)$, $U = (1,1)$ oraz $D = (1,-1)$. Ścieżka z rysunku będzie reprezentowana jako napis $DUHUUDHDUD$.

Ścieżki Motzkina

Definicja

Ścieżka Motzkina o długości n to ścieżka kratowa z punktu $(0,0)$ do $(n,0)$, która składa się z segmentów $D=(1,-1)$, $H=(1,0)$, $U=(1,1)$ oraz nie schodzi poniżej osi x.

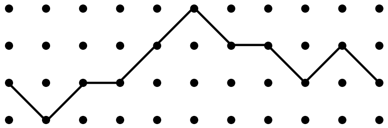


Rysunek: Ścieżka Motzkina o długości 7.

Ścieżki Motzkina

Definicja

Swobodna ścieżka Motzkina o długości n to ścieżka kratowa z punktu $(0,0)$ do $(n,0)$, która składa się z segmentów $D=(1,-1)$, $H=(1,0)$, $U=(1,1)$.

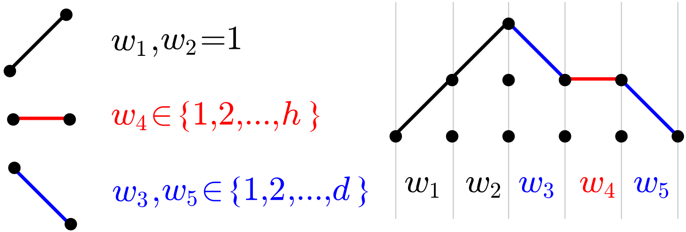


Rysunek: Ścieżka Motzkina o długości 10.

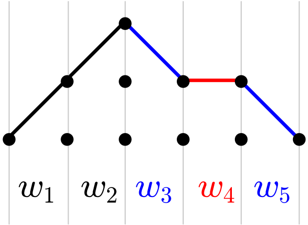
Ważone Ścieżki Motzkina

Definicja (Chen, Li, Shapiro and Yan)

Ważona (h, d) **swobodna ścieżka Motzkina** o długości n to ścieżka Motzkina, której każdy segment poziomy H ma przypisaną wagę ze zbioru h elementowego oraz każdy segment opadający D ma przypisaną liczbę ze zbioru d elementowego.



Ważone ścieżki Motzkina



Rysunek: Ścieżka Motzkina o długości 5.

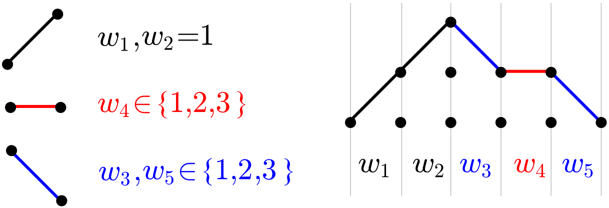
Przykład

Wszystkich różnych ważonych (h, d) ścieżek Motzkina *UUDHD* jest hd^2.

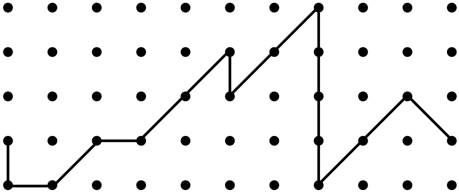
Ważone $(3,3)$ swobodne ścieżki Motzkina

Definicja

Oznaczmy przez $\mathcal{M}(n)$ rodzinę wszystkich ważonych $(3,3)$ swobodnych ścieżek Motzkina o długości n.



Ścieżki z pionowymi segmentami

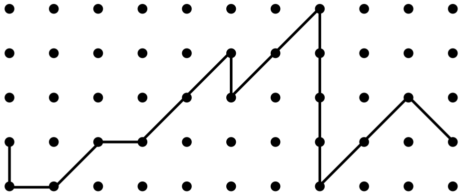


Rysunek: Ścieżka z pionowymi segmentami.

Ścieżki Delannoya

Definicja

Ścieżka Delannoya to ścieżka kratowa z punktu $(0,0)$ do $(n,0)$, która składa się z segmentów: $D=(1,-1)$, $H=(1,0)$, $U=(1,1)$ oraz $V=(0,-1)$.



Rysunek: Ścieżka Delannoya z $(0,0)$ do $(10,0)$.

Definicja

Dla $n \geqslant 1$, niech $\mathcal{D}(n)$ rodzina ścieżek Delannoya z $(0,0)$ do $(n,0)$.

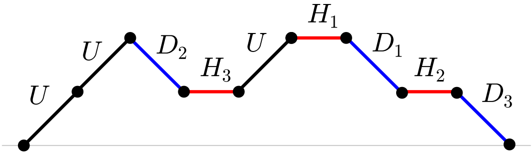
Bijekcja pomiędzy ważonymi $(3, 3)$ swobodnymi ścieżkami Motzkina a ścieżkami Delannoya

Twierdzenie

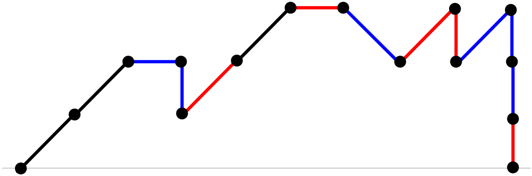
Dla $n \geqslant 1$, istnieje bijekcja

$$\psi : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{D}(n).$$

Bijekcja

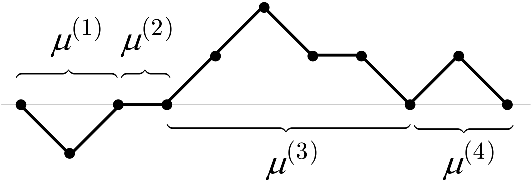


Rysunek: Ścieżka Motzkina z wagami.



Rysunek: Ścieżka Delannoya bez wag.

Bijekcja



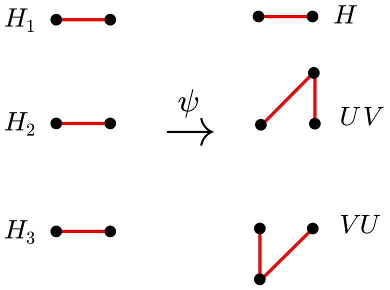
Obserwacja

Każda ścieżka Motzkina ***dekomponuje*** *się na*

1. *poziome segmenty H* ($\mu^{(2)}$)
2. *ścieżki "górne"* ($\mu^{(3)}, \mu^{(4)}$)
3. *ścieżki "dolne"* ($\mu^{(1)}$)

Bijekcja

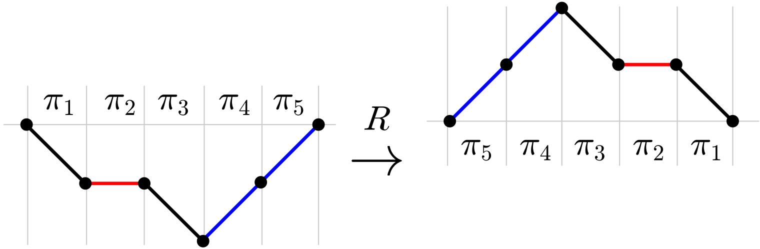
1. Poziome segmenty H



Rysunek: $\mathcal{M}(1) = \{H_1, H_2, H_3\} \to \{H, UV, VU\} = \mathcal{D}(1)$

Bijekcja

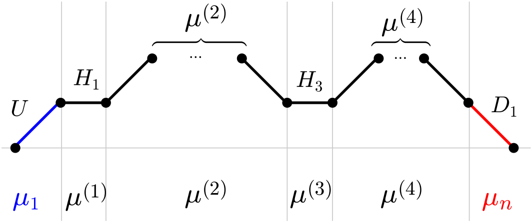
3. Ścieżki "dolne"



Bijekcja

2. Ścieżki "górne"

Niech $\mu = \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathcal{M}(n)$ będzie "górną" ścieżką Motzkina.
Niech $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(d)}$ będzie dekompozycją ścieżki $\mu_2, \dots, \mu_{n-1}$.

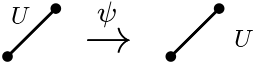


$$\psi(\mu) = \psi(\mu_1)\psi(\mu^{(1)}) \cdots \psi(\mu^{(d)})\psi(\mu_n)\underbrace{V \cdots V}_{h}$$

gdzie h jest liczbą tych $\mu^{(i)}$, które są pojedynczymi H_3.

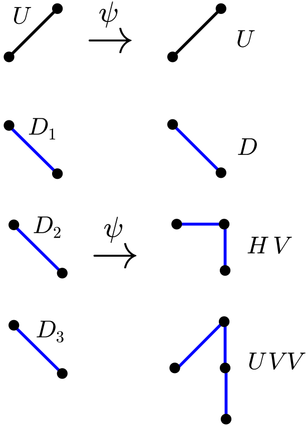
Bijekcja

Pojedyncze segmenty



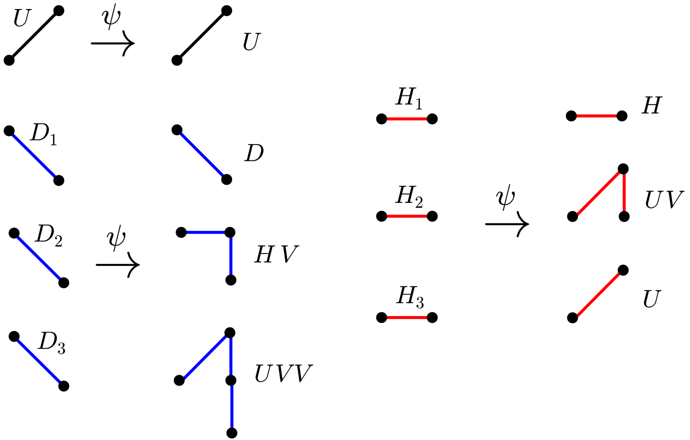
Bijekcja

Pojedyncze segmenty



Bijekcja

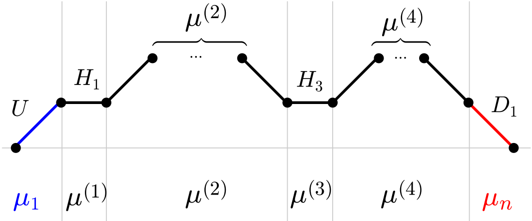
Pojedyncze segmenty



Bijekcja

Niech $\mu = \mu_1 \cdots \mu_n \in \mathcal{M}(n)$ będzie "górną" ścieżką Motzkina. Niech $\mu^{(1)}, \dots, \mu^{(d)}$ będzie dekompozycją ścieżki $\mu_2, \dots, \mu_{n-1}$.

Ścieżka "górna"

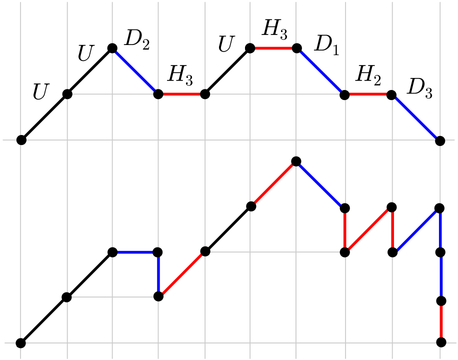


$$\psi(\mu) = \psi(\mu_1)\psi(\mu^{(1)}) \cdots \psi(\mu^{(d)})\psi(\mu_n)\underbrace{V \cdots V}_{h}$$

gdzie h jest liczbą tych $\mu^{(i)}$, które są pojedynczymi H_3.

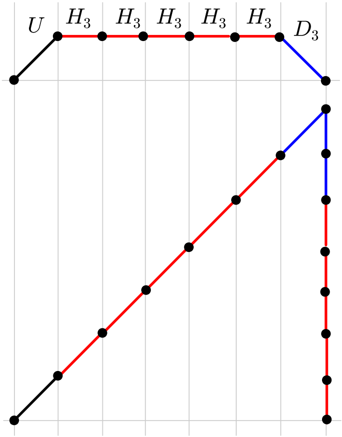
Bijekcja

Przykład



Bijekcja

Przykład



Ilość ścieżek

Definicja

Dla $n \geqslant 1$, niech $M(n) = |\mathcal{M}(n)|$, $D(n) = |\mathcal{D}(n)|$ oraz $M(0) = D(0) = 1$.

Theorem (Drake 2009)

Funkcja tworząca

$$\sum_{n \geqslant 0} D(n) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 6z - 3z^2}}. \tag{1}$$

Wniosek

$$\sum_{n \geqslant 0} M(n) z^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 6z - 3z^2}}. \tag{2}$$

Ilość ścieżek

Pierwsze wyrazy

$$\{M(n)\}_{n \geqslant 0} = (1, 3, 15, 81, 459, 2673, 15849, 95175, \ldots).$$

Postać zwarta

$$M(n) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{k}{n-k} 3^k. \tag{3}$$

Asymptotyka

Twierdzenie

Niech $\alpha = (-3 + 2\sqrt{3})/3$. *Dla* $m, n \geqslant 0$ *mamy*

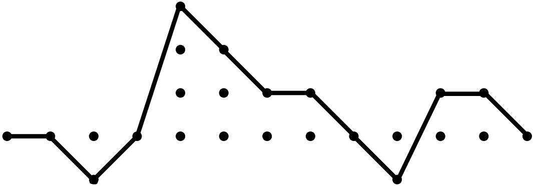
$$\alpha^n M(n) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \sum_{j=0}^{m} \binom{j-1/2}{j} \binom{n-1/2-j}{n} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4} \right)^j + O\left(n^{-m-3/2}\right) \tag{4}$$

Wniosek

Dla $m = 2$ *mamy*

$$M(n) \approx \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \frac{(3+2\sqrt{3})^n}{\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{1-\sqrt{3}}{8n} + \frac{34-18\sqrt{3}}{128n^2}\right)$$
$$\approx 0.545 \frac{6.4641^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{0.09}{n} + \frac{0.022}{n^2}\right).$$

Uogólnienie bijekcji

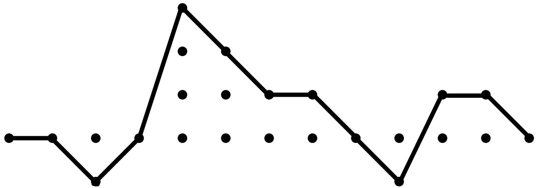


Rysunek: Ścieżka Łukasiewicza.

Ścieżki Łukasiewicza

Definicja

Dla $N \geqslant 1$, **ścieżka** N-**Łukasiewicza** to ścieżka kratowa z punktu $(0,0)$ do $(n,0)$, która składa się z segmentów $D=(1,-1)$, $H=(1,0)$, $U_1=(1,1)$, $U_2=(1,2)$, ..., $U_N=(1,N)$.



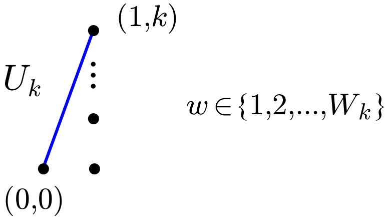
Rysunek: Ścieżka 3-Łukasiewicza.

Dla uproszczenia, piszemy również $U_{-1}=D$ oraz $U_0=H$.

Ważone ścieżki Łukasiewicza

Definicja

Niech $N \geqslant 1$ oraz $W = (W_{-1}, W_0, W_1, \dots, W_N)$, gdzie $W_i \in \mathbb{N}$.
Ważona W **ścieżka** N**-Łukasiewicza** to ścieżka N-Łukasiewicza, której każdy segment U_k ma przypisaną wagę w ze zbioru W_k elementowego.

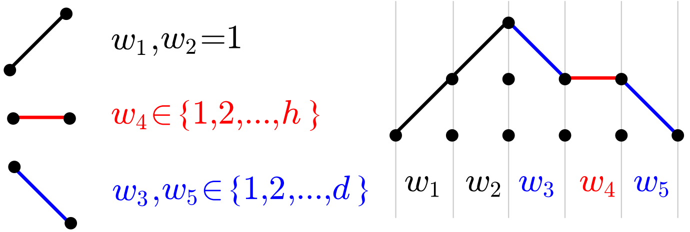


dla $k \in \{-1, 0, 1, \dots, N\}$.

Ważone ścieżki Łukasiewicza

Przykład

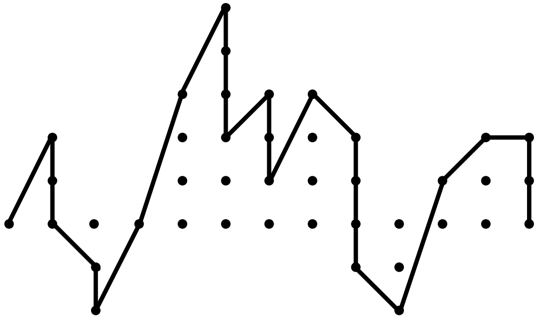
Każda ważona (h, d) ścieżka Motzkina jest ważoną W ścieżką 1-Łukasiewicza, gdzie $W = (d, h, 1)$.



Uogólnione ścieżki Delannoya

Definicja

Dla $N \geqslant 1$, **ścieżka** N**-Delannoya** to ścieżka kratowa z punktu $(0,0)$ do $(n,0)$, która składa się z segmentów $D = (1,-1)$, $H = (1,0)$, $U_1 = (1,1)$, $U_2 = (1,2)$, ..., $U_N = (1,N)$ oraz pionowego $V = (0,-1)$.



Rysunek: Ścieżka 3-Delannoya.

Czy istnieje bijekcja?

Definicja

Niech $\mathcal{L}_N^W(n)$ oraz $\mathcal{D}_N(n)$ oznaczają odpowiednio rodziny ważonych W ścieżek N-Łukasiewicza oraz ścieżek N-Delannoya z $(0,0)$ do $(n,0)$.

Problem

Czy dla każdego $N \geqslant 1$ istnieje taki ciąg $W = (W_1, \ldots, W_N)$, że

$$|\mathcal{L}_N^W(n)| = |\mathcal{D}_N(n)|.$$

Dla $N = 1$ istnieje. Bijekcja dla ważonych $(3,3)$ ścieżek Motzkina oraz ścieżek Delannoya.

Ścieżki Łukasiewicza - Bijekcja

Twierdzenie

Dla $N \geqslant 1$, *niech* $W = (W_{-1}, W_0, \ldots, W_N)$ *taki, że*

$$W_k = \binom{N+2}{k+2},$$

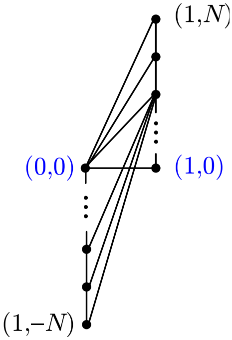
dla $k \in \{-1, 0, 1, \ldots, N\}$.
Wtedy dla każdego $n \geqslant 1$ *istnieje bijekcja*

$$\phi : \mathcal{L}_N^W(n) \to \mathcal{D}_N(n).$$

Dla $N \geqslant 1$ oraz $k = 0$ (segmenty poziome H) mamy $W_k = \binom{N+2}{2}$.

Obserwacja (Dla $k = 0$)

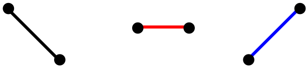
Ilość ścieżek N-Delannoya z $(0, 0)$ *do* $(1, 0)$ *jest* $\binom{N+2}{2}$.



Przykłady

N = 1

U_{-1} U_0 U_1



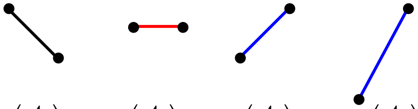
$\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

3 3 1

Przykłady

$N = 2$

$$U_{-1} \qquad U_0 \qquad U_1 \qquad U_2$$



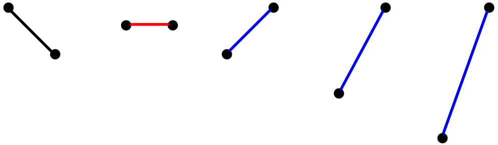
$$\binom{4}{1} \qquad \binom{4}{2} \qquad \binom{4}{3} \qquad \binom{4}{4}$$

$$4 \qquad 6 \qquad 4 \qquad 1$$

Przykłady

$N = 3$

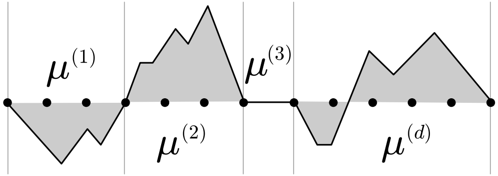
U_{-1}	U_0	U_1	U_2	U_3



$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$
5	10	10	5	1

Bijekcja

Dekompozycja

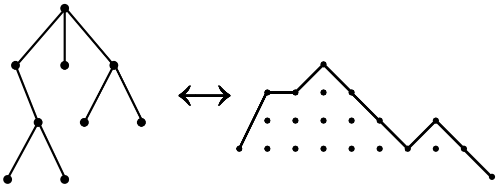


Obserwacja

Każda ścieżka Łukasiewicza dekomponuje się na

1. *poziome segmenty H* ($\mu^{(3)}$)
2. *ścieżki "górne"* ($\mu^{(2)}$)
3. *ścieżki "dolne"* ($\mu^{(1)}$)
4. *ścieżki "krzyżujące"* ($\mu^{(d)}$)

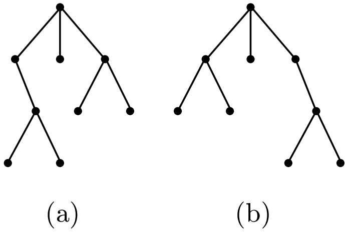
Drzewa planarne i ścieżki Łukasiewicza



Drzewa planarne

Definicja

Drzewo planarne to drzewo ukorzenione, w którym kolejność występowania synów jest rozróżnialna. **Drzewo planarne** N**-arne** to drzewo planarne, w którym ilość synów jest ograniczona przez N.



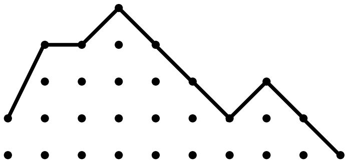
Rysunek: Dwa różne 3-arne drzewa planarne.

Oznaczmy $\mathcal{P}_N(n)$ rodzina N-arnych drzew planarnych o n wierzchołkach.

Opadające ścieżki Łukasiewicza

Definicja

Opadająca ścieżka N-Łukasiewicza to ścieżka kratowa z $(0, 1)$ do $(n, 0)$ złożoną z segmentów $D = (1, -1)$, $H = (1, 0)$, $U_1 = (1, 1)$, $U_2 = (1, 2)$, ..., $U_N = (1, N)$ taką, która nie dochodzi do żadnego innego punktu na osi x niż ostatni $(n, 0)$.

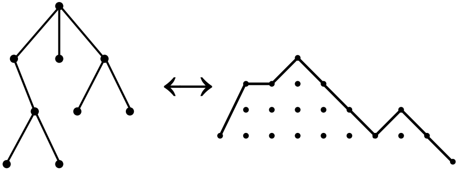


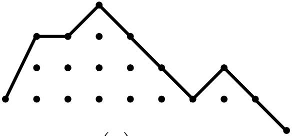
Rysunek: Opadająca ścieżka 2-Łukasiewicza.

Bijekcja

Twierdzenie (Flajolet)

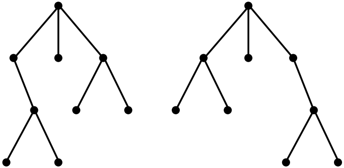
Dla $n \geqslant 1$ oraz $N \geqslant 2$, istnieje bijekcja pomiędzy rodziną opadających ścieżek $(N-1)$-Łukasiewicza długości n oraz rodziną N-arnych drzew planarnych o n wierzchołkach.





(a) (b)

Rysunek: Dwie opadające ścieżki 2-Łukasiewicza.



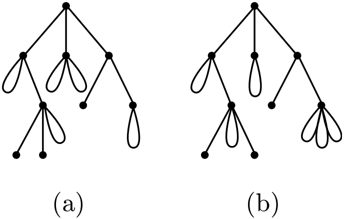
(a) (b)

Rysunek: Dwa 3-arne drzewa planarne.

Uogólnienie na drzewa planarne z pętlami

Definicja

Drzewo planarne z dozwolonymi pętlami to drzewo planarne, w którym syn dowolnego wierzchołka v może być tym samym wierzchołkiem v (pętla).

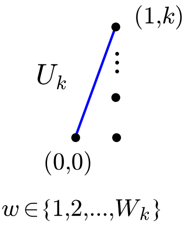


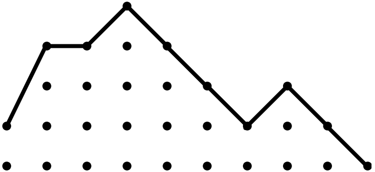
Rysunek: Dwa 3-arne drzewa planarne z dozwolonymi pętlami.

Ważone opadające ścieżki Łukasiewicza

Definicja

Ważoną opadającą ścieżką N**-Łukasiewicza** nazywamy opadającą ścieżkę N-Łukasiewicza z $(0,1)$ do $(n,0)$, w której każdy segment U_k ma przypisaną wagę ze zbioru $\binom{N+2}{k+2}$ elementowego, dla $k \in \{-1, \ldots, N\}$.

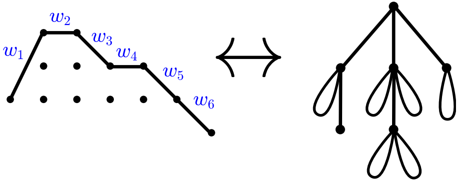




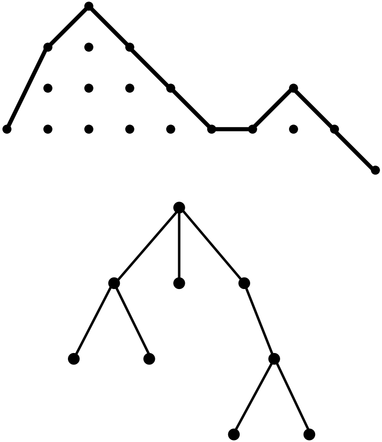
Bijekcja

Twierdzenie

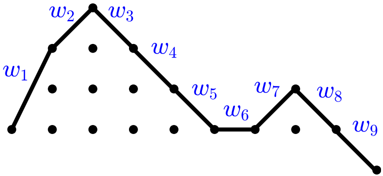
Dla $n \geqslant 1$ oraz $N \geqslant 2$, istnieje bijekcja pomiędzy rodziną ważonych W opadających ścieżek $(N-1)$-Łukasiewicza długości n oraz rodziną N-arnych drzew planarnych o n wierzchołkach z dozwolonymi pętlami.

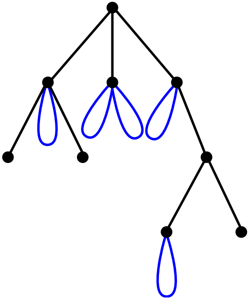


Bijekcja

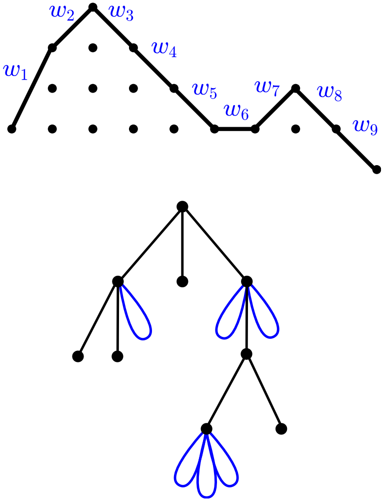


Bijekcja





Bijekcja

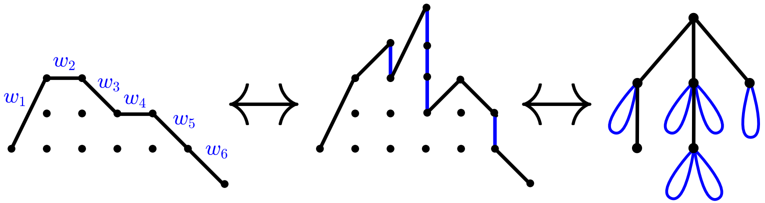


Podsumowując

Twierdzenie

Dla każdego $N \geqslant 2$ i $n \geqslant 1$ istnieją bijekcje pomiędzy poniższymi rodzinami:

1. *opadających ważonych ścieżek $(N-1)$-Łukasiewicza długości n,*
2. *opadających ścieżek $(N-1)$-Delannoya z $(0,1)$ do $(n,0)$,*
3. *N-arnych grafów planarnych o n wierzchołkach z dozwolonymi pętlami.*



Dziekuję