Liczby Ramseya z parametrem C_4

Janusz Dybizbański

Instytut Informatyki
Uniwersytet Gdański
ul. Wita Stwosza 57
80-952 Gdańsk

12 kwietnia 2013r.

Definicja 1. Grafowe liczby Ramseya

Grafową liczbę Ramsaya oznaczamy przez $R(H_1, ..., H_m) = n$ jeżeli n jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że dla każdego $m-$kolorowania krawędziowego grafu pełnego K_n istnieje i takie, że graf ten zawiera podgraf H_i, w którego skład wchodzą wyłącznie krawędzie w kolorze i.

Definicja 1. Grafowe liczby Ramseya

Grafową liczbę Ramsaya oznaczamy przez $R(H_1, ..., H_m) = n$ jeżeli n jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że dla każdego $m-$kolorowania krawędziowego grafu pełnego K_n istnieje i takie, że graf ten zawiera podgraf H_i, w którego skład wchodzą wyłącznie krawędzie w kolorze i.

$$R(K_n, K_m) = R(n, m)$$

Znane wartości i oszacowania klasycznych liczb Ramseya

n\m	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	9	14	18	23	28	36	40-43	**47**-51
4		18	25	35-41	49-61	**57**-84	73-115	92-149	98-191
5			43-49	58-87	80-143	101-216	126-316	144-442	171-633
6				102-165	113-298	132-495	169-780	179-1171	253-1804

Znane wartości i oszacowania klasycznych liczb Ramseya

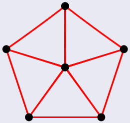
n\m	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	9	14	18	23	28	36	40-43	**47**-51
4		18	25	35-41	49-61	**57**-84	73-115	92-149	98-191
5			43-49	58-87	80-143	101-216	126-316	144-442	171-633
6				102-165	113-298	132-495	169-780	179-1171	253-1804

$R(3,3,3) = 17$,
$30 \leq R(3,3,4) \leq 31$,
$51 \leq R(3,3,3,3) \leq 62$

Liczby Ramseya dla kół i cykli

Koło

$W_n = C_{n-1} + K_1$

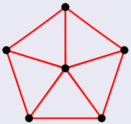


Koło W_6

Liczby Ramseya dla kół i cykli

Koło

$W_n = C_{n-1} + K_1$



Koło W_6

Znane wyniki

- $R(C_3, W_n) = 2n - 1$ dla $n \geq 6$, Burr i Erdős, 1983,
- $R(C_m, W_n) = 2n - 1$ dla nieparzystego m oraz $n \geq 5m - 6$, Zhou Huai Lu, 1995,
- $R(C_m, W_n) = 3m - 2$ dla parzystego $n \geq 4$ oraz $m \geq n - 1$, $m \neq 3$. Yaojun Chen i inni, 2012.

Twierdzenie 2. Niezależnie Rosta (1973) i Faudree, Schelp (1974)

$$R(C_4, C_n) = \begin{cases} 7 & \text{dla } n \in \{3, 5\} \\ 6 & \text{dla } n = 4 \\ n+1 & \text{dla } n \geq 6 \end{cases}$$

Górne oszacowanie

Twierdzenie 3. Surahmat i inni, 2005

$R(C_4, W_n) \leq n + \lceil (n-1)/3 \rceil$

Górne oszacowanie

Twierdzenie 3. Surahmat i inni, 2005

$R(C_4, W_n) \leq n + \lceil (n-1)/3 \rceil$

Twierdzenie 4. Dybizbański, Dzido, 2013

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$,
$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1.$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$,
$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$.

Szkic dowodu

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$,
$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$.

Szkic dowodu

Istnieje $v \in V$ taki, że $deg_r(v) \leq \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor$

$$deg_b(v) \geq n = R(C_4, C_{n-1})$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$,
$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 1$.

Szkic dowodu

Istnieje $v \in V$ taki, że $deg_r(v) \leq \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor$

$$deg_b(v) \geq n = R(C_4, C_{n-1})$$

$\delta_r(G) \geq \lfloor \sqrt{n-2} \rfloor + 2$

$$\left\lceil \frac{\delta_r(G)|V(G)|}{2} \right\rceil > t(n)$$

Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 11$,
$R(C_4, W_n) \leq n + \lfloor\sqrt{n-2}\rfloor + 1$.

Szkic dowodu

Istnieje $v \in V$ taki, że $deg_r(v) \leq \lfloor\sqrt{n-2}\rfloor$

$$deg_b(v) \geq n = R(C_4, C_{n-1})$$

$$\delta_r(G) \geq \lfloor\sqrt{n-2}\rfloor + 2$$

$$\left\lceil \frac{\delta_r(G)|V(G)|}{2} \right\rceil > t(n)$$

$$\delta_r(G) = \lfloor\sqrt{n-2}\rfloor + 1$$

Graf $G[N_b(v)]$ posiada niebieski cykl Hamiltona

Dolne oszacowanie

Twierdzenie 5. Erdős - Rényi, 1962

Jeżeli q jest potęgą liczby pierwszej to istnieje graf $ER(q)$ o $n = q^2 + q + 1$ wierzchołkach, maksymalnym stopniu $q + 1$ oraz liczbie krawędzi rzędu $\frac{1}{2}n^{3/2}$ niezawierający cyklu C_4.

Dolne oszacowanie

Twierdzenie 5. Erdős - Rényi, 1962

Jeżeli q jest potęgą liczby pierwszej to istnieje graf $ER(q)$ o $n = q^2 + q + 1$ wierzchołkach, maksymalnym stopniu $q + 1$ oraz liczbie krawędzi rzędu $\frac{1}{2}n^{3/2}$ niezawierający cyklu C_4.

Inne własności grafów $ER(q)$ - Parson, 1975

- $ER(q)$ ma $q^2 + q + 1$ wierzchołków, $q + 1$ jest stopnia q oraz q^2 jest stopnia $q + 1$.
- Żadne dwa wierzchołki $ER(q)$ stopnia q nie są połączone krawędzią.

$H(q)$ oznaczmy podgraf $ER(q)$ uzyskany przez usunięcie jednego z wierzchołków stopnia q.

$H(q)$ oznaczmy podgraf $ER(q)$ uzyskany przez usunięcie jednego z wierzchołków stopnia q.

$H(q)$ zawiera $2q$ wierzchołków stopnia q oraz $q^2 - q$ wierzchołków stopnia $q + 1$.

$H(q)$ oznaczmy podgraf $ER(q)$ uzyskany przez usunięcie jednego z wierzchołków stopnia q.

$H(q)$ zawiera $2q$ wierzchołków stopnia q oraz $q^2 - q$ wierzchołków stopnia $q + 1$.

W uzupełnieniu $H(q)$ każdy wierzchołek jest stopnia co najwyżej $q^2 - 1$ więc nie zawiera koła W_{q^2+1}.

$H(q)$ oznaczmy podgraf $ER(q)$ uzyskany przez usunięcie jednego z wierzchołków stopnia q.

$H(q)$ zawiera $2q$ wierzchołków stopnia q oraz $q^2 - q$ wierzchołków stopnia $q + 1$.

W uzupełnieniu $H(q)$ każdy wierzchołek jest stopnia co najwyżej $q^2 - 1$ więc nie zawiera koła W_{q^2+1}.

Twierdzenie 6. Dybizbański, Dzido, 2013

Dla każdego $q \geq 4$ będącego potęgą liczby pierwszej

$$R(C_4, W_{q^2+1}) = q^2 + q + 1.$$

Wartości $R(C_4, W_n)$ dla małych n

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$R(C_4, W_n)$	10	9	10	9	11	12	13	14	16	17

Wartości $R(C_4, W_n)$ dla małych n

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$R(C_4, W_n)$	10	9	10	9	11	12	13	14	16	17

Twierdzenie 7. Dybizbański, Dzido, 2013

- $R(C_4, W_{14}) = 18$,
- $R(C_4, W_{15}) = 19$,
- $R(C_4, W_{16}) = 20$,
- $R(C_4, W_{17}) = 21$.

Definicja 8. Dwudzielne liczby Ramseya

Dwudzielna liczba Ramsaya oznaczana przez $b(n_1, \ldots, n_k) = b$ jeżeli b jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że dla każdego $k-$kolorowania krawędziowego pełnego grafu dwudzielnego $K_{b,b}$ istnieje i takie, że graf ten zawiera podgraf K_{n_i,n_i}, w którego skład wchodzą krawędzie w kolorze i.

Definicja 8. Dwudzielne liczby Ramseya

Dwudzielna liczba Ramsaya oznaczana przez $b(n_1, \ldots, n_k) = b$ jeżeli b jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że dla każdego $k-$kolorowania krawędziowego pełnego grafu dwudzielnego $K_{b,b}$ istnieje i takie, że graf ten zawiera podgraf K_{n_i,n_i}, w którego skład wchodzą krawędzie w kolorze i.

$$b_k(m) = b(\underbrace{m, m, \ldots, m}_{k \text{ razy}})$$

Wartości i oszacowania liczb $b(n, m)$

n\m	2	3	4	5	6
2	5	9	14	≤ 19	≤ 25
3		17	≤ 29	≤ 41	≤ 56
4			≤ 48	≤ 72	≤ 101
5				≤ 115	≤ 168

Wartości i oszacowania liczb $b(n, m)$

n\m	2	3	4	5	6
2	5	9	14	≤ 19	≤ 25
3		17	≤ 29	≤ 41	≤ 56
4			≤ 48	≤ 72	≤ 101
5				≤ 115	≤ 168

Znane wartości liczb $b_k(2)$

$b_2(2) = 5$, Beineke i Schwenk, 1975
$b_3(2) = 11$, Exoo, 1991

Twierdzenie 9. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdego k będącego potęgą liczby pierwszej

$$b_k(2) \geq k^2 + 1.$$

Twierdzenie 9. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdego k będącego potęgą liczby pierwszej

$$b_k(2) \geq k^2 + 1.$$

Szkic dowodu, inspirowany konstrukcją Lazebnika i Woldara

Niech $n = k^2$. Zdefiniujemy $k-$kolorowanie kliki $K_{n,n}$ niezawierające monochromatycznego cyklu C_4.

Twierdzenie 9. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdego k będącego potęgą liczby pierwszej

$$b_k(2) \geq k^2 + 1.$$

Szkic dowodu, inspirowany konstrukcją Lazebnika i Woldara

Niech $n = k^2$. Zdefiniujemy $k-$kolorowanie kliki $K_{n,n}$ niezawierające monochromatycznego cyklu C_4. Niech F będzie k elementowym ciałem. Partycje grafu dwudzielnego oznaczmy przez:
$L = R = F \times F$

Twierdzenie 9. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdego k będącego potęgą liczby pierwszej

$$b_k(2) \geq k^2 + 1.$$

Szkic dowodu, inspirowany konstrukcją Lazebnika i Woldara

Niech $n = k^2$. Zdefiniujemy $k-$kolorowanie kliki $K_{n,n}$ niezawierające monochromatycznego cyklu C_4. Niech F będzie k elementowym ciałem. Partycje grafu dwudzielnego oznaczmy przez:
$L = R = F \times F$
Krawędzi pomiędzy wierzchołkami $(a, b) \in L$ oraz $(c, d) \in R$ nadajemy kolor

$$a \cdot c - (b + d)$$

Definicja 10. Liczby Zarankiewicza

Liczbę Zarankiewicza oznaczamy przez $z(m, n; s, t)$ i jest to maksymalna liczba krawędzi podgrafu $K_{m,n}$ niezawierającego podgrafu $K_{s,t}$.

Definicja 10. Liczby Zarankiewicza

Liczbę Zarankiewicza oznaczamy przez $z(m,n;s,t)$ i jest to maksymalna liczba krawędzi podgrafu $K_{m,n}$ niezawierającego podgrafu $K_{s,t}$.

ozanczenia

$z(m,n) = z(m,n;2,2)$
$z(n) = z(n,n;2,2)$

Definicja 10. Liczby Zarankiewicza

Liczbę Zarankiewicza oznaczamy przez $z(m,n;s,t)$ i jest to maksymalna liczba krawędzi podgrafu $K_{m,n}$ niezawierającego podgrafu $K_{s,t}$.

ozanczenia

$z(m,n) = z(m,n;2,2)$
$z(n) = z(n,n;2,2)$

Reiman 1958, Bollobás 1995

- $z(m) \leq (m + m\sqrt{4m-3})/2$, dla każdego $m \geq 1$,
- $z(q^2+q+1) = (q+1)(q^2+q+1)$, dla q będącego potęgą liczby pierwszej,
- $\lim_{n\to\infty} z(n)/n^{3/2} = 1$.

Twierdzenie 11. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdego k będącego potęga liczby pierwszej,

$$z(k^2+k+1-h) = \begin{cases} k^3+2k^2+2k+1 & \text{dla} \quad h=0 \text{ (Reiman)}, \\ k^3+2k^2 & \text{dla} \quad h=1, \\ k^3+2k^2-2k & \text{dla} \quad h=2, \\ k^3+2k^2-4k+1 & \text{dla} \quad h=3. \end{cases}$$

Górne oszacowanie

Twierdzenie 12. Hattingh i Henning, 1998

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$,
$b_k(2) \leq k^2 + k - 1$.

Górne oszacowanie

Twierdzenie 12. Hattingh i Henning, 1998

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$,
$b_k(2) \leq k^2 + k - 1$.

Twierdzenie 13. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 5$,
$b_k(2) \leq k^2 + k - 2$.

Górne oszacowanie

Twierdzenie 12. Hattingh i Henning, 1998

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 2$,
$b_k(2) \leq k^2 + k - 1$.

Twierdzenie 13. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

Dla każdej liczby naturalnej $k \geq 5$,
$b_k(2) \leq k^2 + k - 2$.

Dowód bazuje na twierdzeniu 11 dla $h = 3$.

Hattingh i Henning, 1998

$b_4(2) \leq 19$

Hattingh i Henning, 1998

$b_4(2) \leq 19$

$|E(K_{18,18})| = 324$
$z(18) = 81$

Hattingh i Henning, 1998

$b_4(2) \leq 19$

$|E(K_{18,18})| = 324$
$z(18) = 81$

Istnieje dokładnie 1 graf ekstremalny $z(18)$ (wyznaczone za pomocą komputera).

Hattingh i Henning, 1998

$b_4(2) \leq 19$

$|E(K_{18,18})| = 324$
$z(18) = 81$

Istnieje dokładnie 1 graf ekstremalny $z(18)$ (wyznaczone za pomocą komputera).

Twierdzenie 14. Dybizbański, Dzido, Radziszowski, 2013

$b_4(2) = 19$

0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

2	**1**	**1**	3	3	4	4	4	3	**1**	3	2	**1**	4	2	**1**	2	3
1	2	**1**	4	3	3	3	4	4	2	**1**	3	2	**1**	4	3	**1**	2
1	**1**	2	3	4	3	4	3	4	3	2	**1**	4	2	**1**	2	3	**1**
4	4	3	2	**1**	**1**	3	3	4	**1**	3	2	2	3	**1**	2	**1**	4
3	4	4	**1**	2	**1**	4	3	3	2	**1**	3	**1**	2	3	4	2	**1**
4	3	4	**1**	**1**	2	3	4	3	3	2	**1**	3	**1**	2	**1**	4	2
3	3	4	4	4	3	2	**1**	**1**	2	4	**1**	**1**	3	2	2	**1**	3
4	3	3	3	4	4	**1**	2	**1**	**1**	2	4	2	**1**	3	3	2	**1**
3	4	3	4	3	4	**1**	**1**	2	4	**1**	2	3	2	**1**	**1**	3	2
1	2	4	**1**	2	4	2	**1**	3	**1**	2	2	4	3	4	3	3	4
4	**1**	2	4	**1**	2	3	2	**1**	2	**1**	2	4	4	3	4	3	3
2	4	**1**	2	4	**1**	**1**	3	2	2	2	**1**	3	4	4	3	4	3
1	2	3	2	**1**	4	**1**	2	4	3	4	3	**1**	2	2	4	4	3
3	**1**	2	4	2	**1**	4	**1**	2	3	3	4	2	**1**	2	3	4	4
2	3	**1**	**1**	4	2	2	4	**1**	4	3	3	2	2	**1**	4	3	4
1	4	2	2	3	**1**	2	4	**1**	3	4	4	4	3	3	**1**	2	2
2	**1**	4	**1**	2	3	**1**	2	4	4	3	4	3	4	3	2	**1**	2
4	2	**1**	3	**1**	2	4	**1**	2	4	4	3	3	3	4	2	2	**1**

Liczba nieizomorficznych kolorowań krytycznych dla $b_4(2)$

Znaleźliśmy 8 nieizomorficznych 4−kolorowań $K_{18,18}$ niezawierających jednokolorowego C_4.

Liczba nieizomorficznych kolorowań krytycznych dla $b_4(2)$

Znaleźliśmy 8 nieizomorficznych 4−kolorowań $K_{18,18}$ niezawierających jednokolorowego C_4.

Konstrukcja

Dwa pierwsze kolory zostały ułożone tak jak w znalezionym rozwiązaniu.

Liczba nieizomorficznych kolorowań krytycznych dla $b_4(2)$

Znaleźliśmy 8 nieizomorficznych 4−kolorowań $K_{18,18}$ niezawierających jednokolorowego C_4.

Konstrukcja

Dwa pierwsze kolory zostały ułożone tak jak w znalezionym rozwiązaniu.
Dla pozostałych do pokolorowania krawędzi ułożyliśmy formułę logiczną:

- każdej krawędzi odpowiadała jedna zmienna.
- klauzule zapobiegały powstawaniu monochromatycznego C_4.

Liczba nieizomorficznych kolorowań krytycznych dla $b_4(2)$

Znaleźliśmy 8 nieizomorficznych 4−kolorowań $K_{18,18}$ niezawierających jednokolorowego C_4.

Konstrukcja

Dwa pierwsze kolory zostały ułożone tak jak w znalezionym rozwiązaniu.
Dla pozostałych do pokolorowania krawędzi ułożyliśmy formułę logiczną:

- każdej krawędzi odpowiadała jedna zmienna.
- klauzule zapobiegały powstawaniu monochromatycznego C_4.

Do rozwiązywania problemu SAT zastosowaliśmy `picoSAT`
Do sprawdzenia izomorfizmu korzystaliśmy z `nauty`

J. Dybizbański, T. Dzido, On some Ramsey numbers for quadrilaterals versus wheels

J. Dybizbański, T. Dzido, S. Radziszowski, On Some Zarankiewicz Numbers and Bipartite Ramsey Numbers for Quadrilateral

Dziękuję za uwagę.